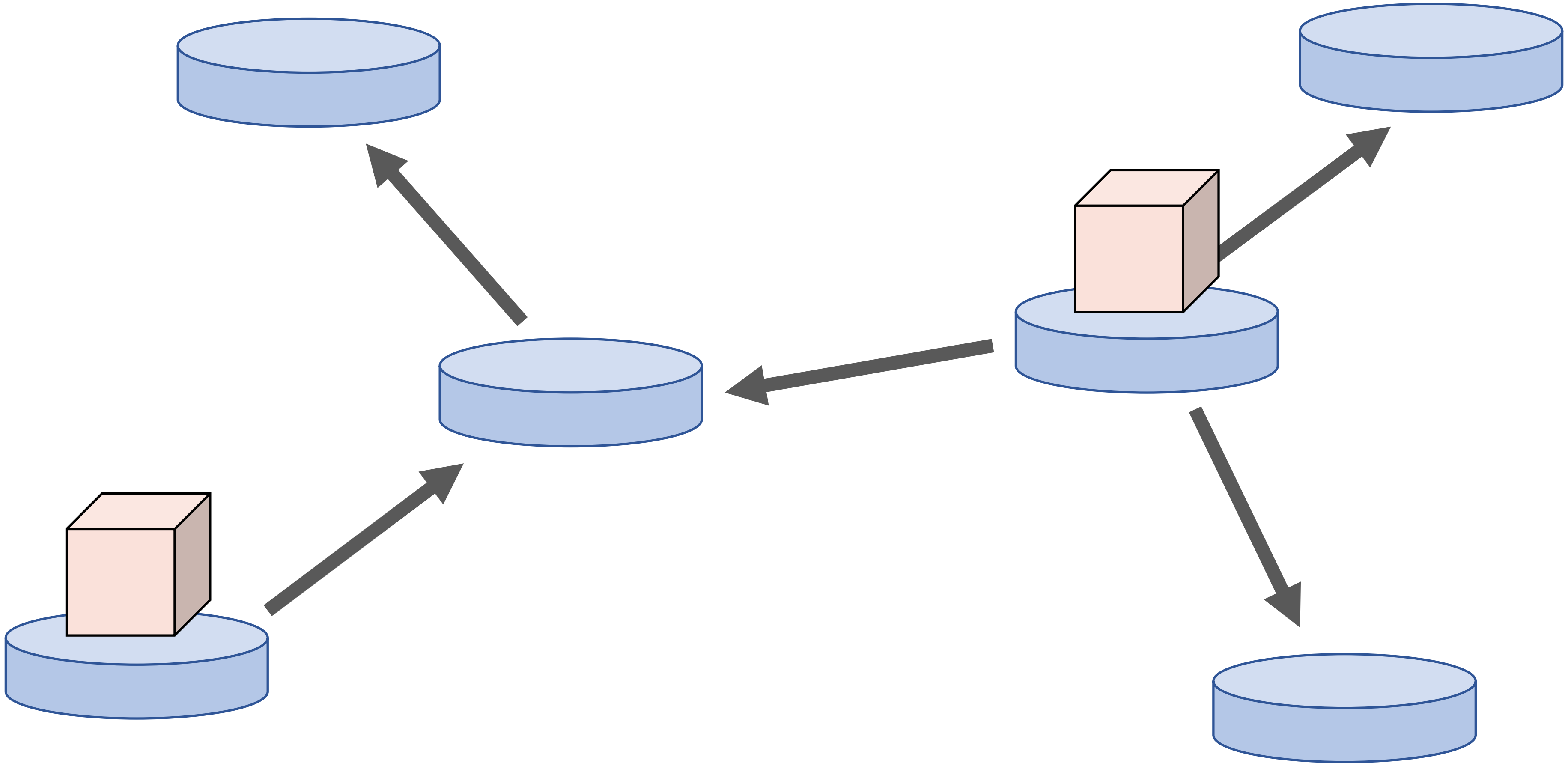
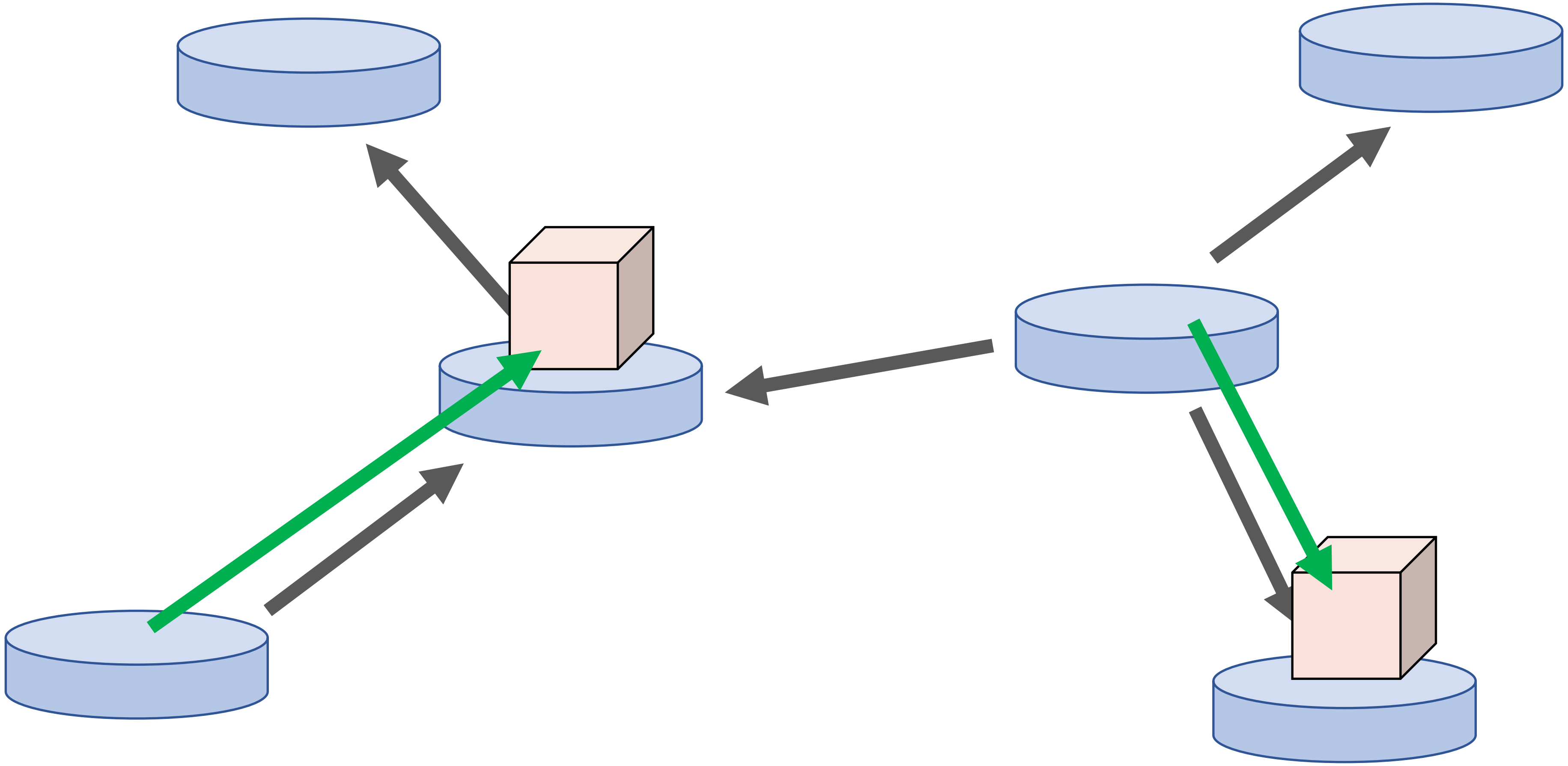
JOI 2022/2023 春
ベルトコンベア

解説: 木ノ下恭範 (noshi91)

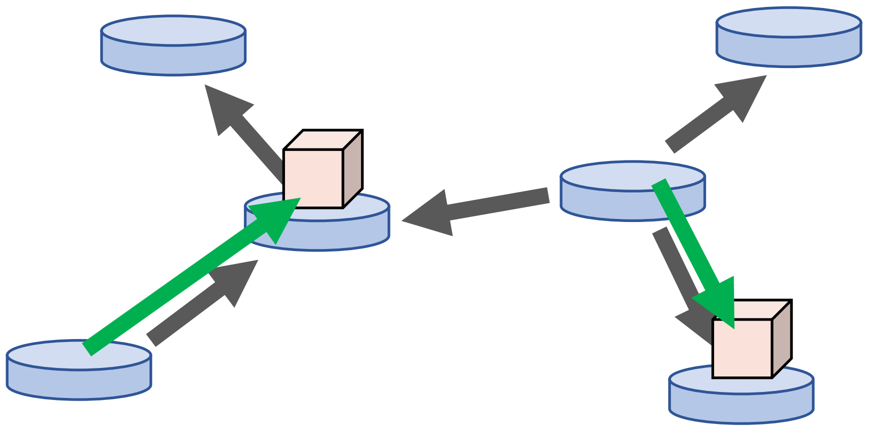
問題概要



問題概要



問題概要



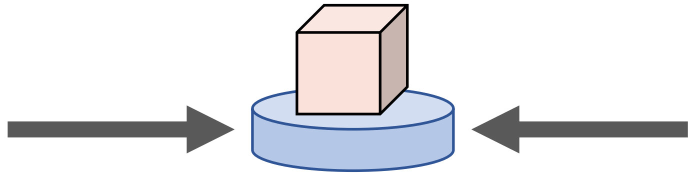
N 頂点の木がある
各辺は製品を一方向に運ぶが、方向が分からない

1. いくつかの辺を選んで反転する
2. いくつかの頂点に製品を置き、製品が移動する
3. 各頂点に製品が 1 個以上あるか確認する
4. 反転した辺を戻す

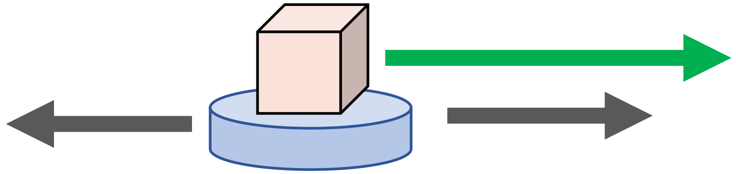
30 クエリ以内に辺の向きを判定せよ

問題概要

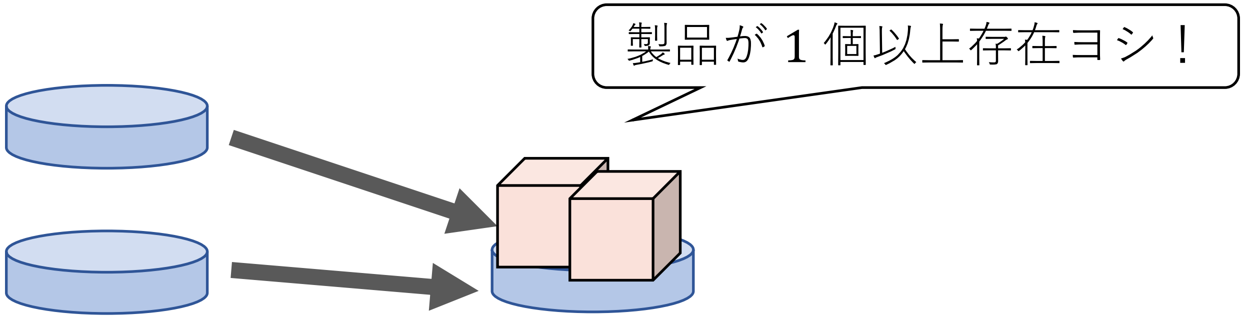
出ていく辺が無ければ動かない



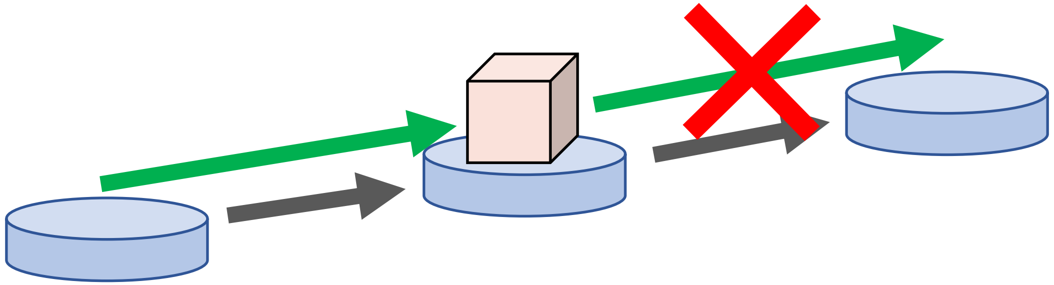
どの辺で移動するかは分からない



製品が合流しても分からない



移動は連鎖せず、1 回だけ

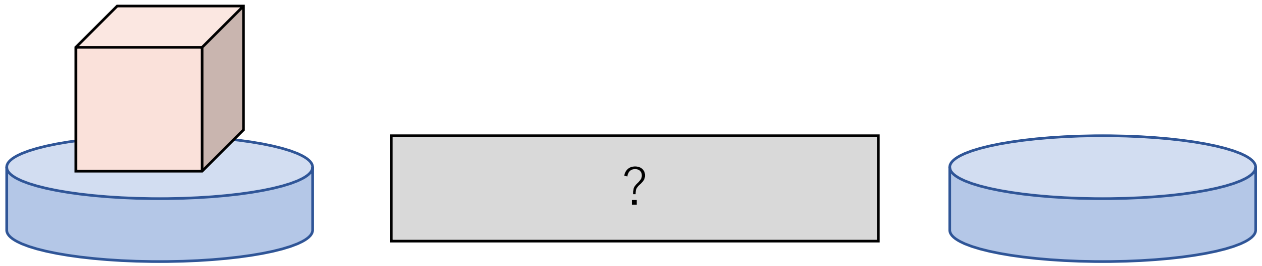


小課題

- （1 点）$N = 2$
- （14 点）$N = 30$
- （10 点）$N = 100\,000$，入力はパスグラフ
- （75 点）$N = 100\,000$

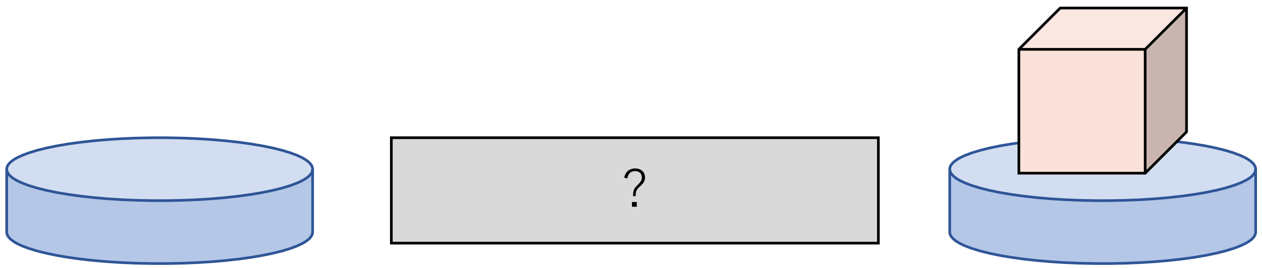
$N = 2$

とりあえず置いてみる



$$N = 2$$

とりあえず置いてみる



$N = 2$

とりあえず置いてみる

動いたら、その向きに辺が向いていることが確定

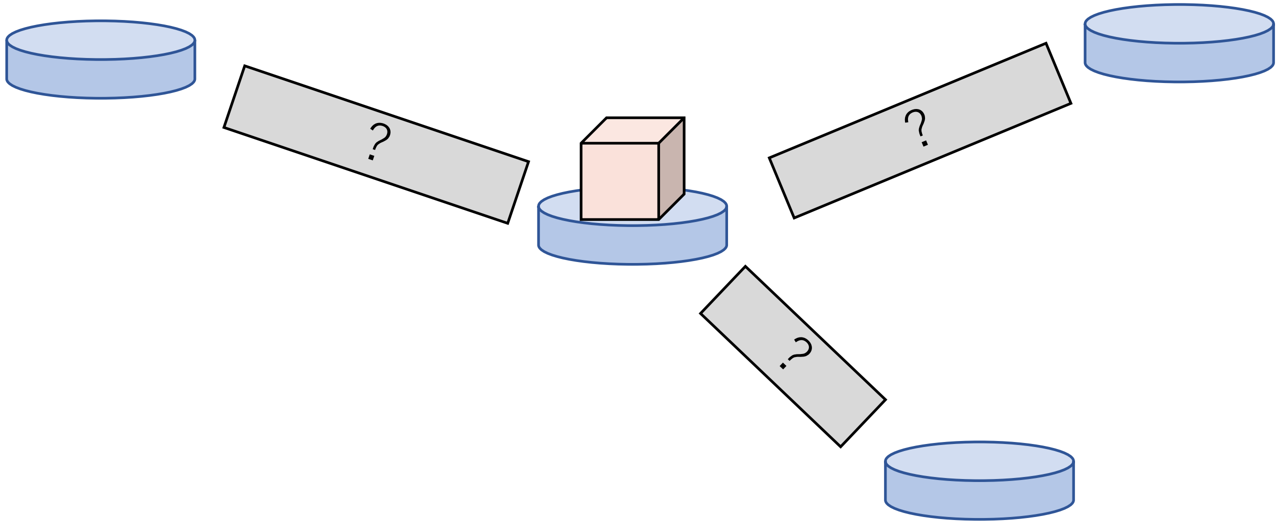
$N = 2$

とりあえず置いてみる

留まったら、辺が製品側を向いていることが確定

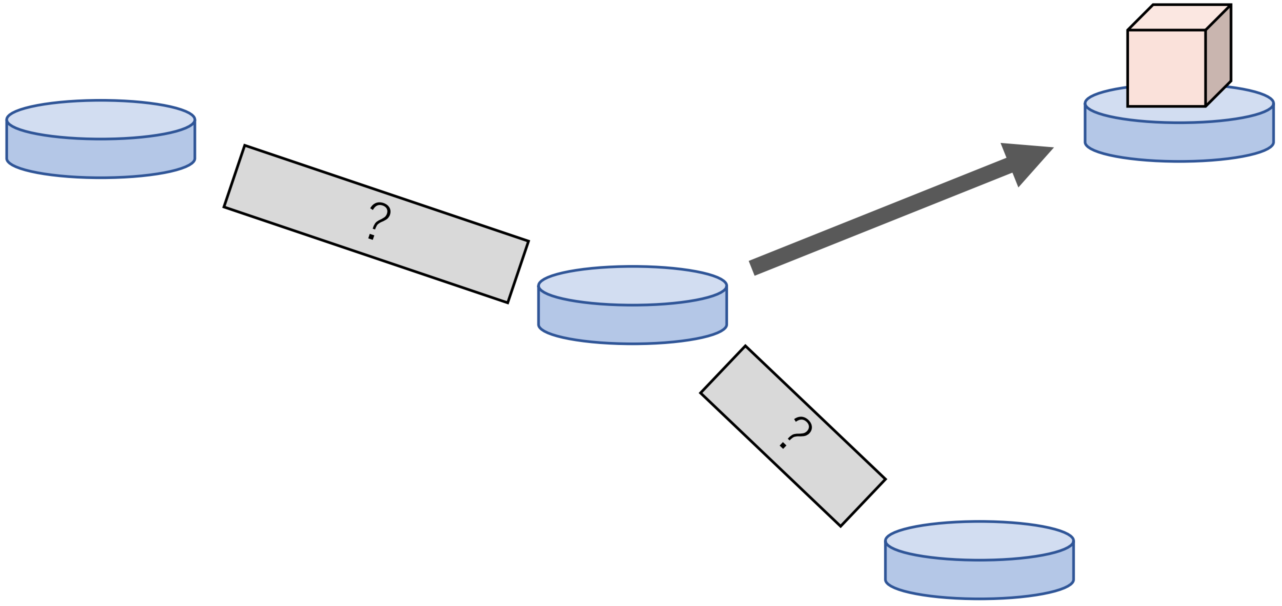
$$N = 30$$

製品を何個も置くと動きがよく分からないので、1 個だけ置いてみる



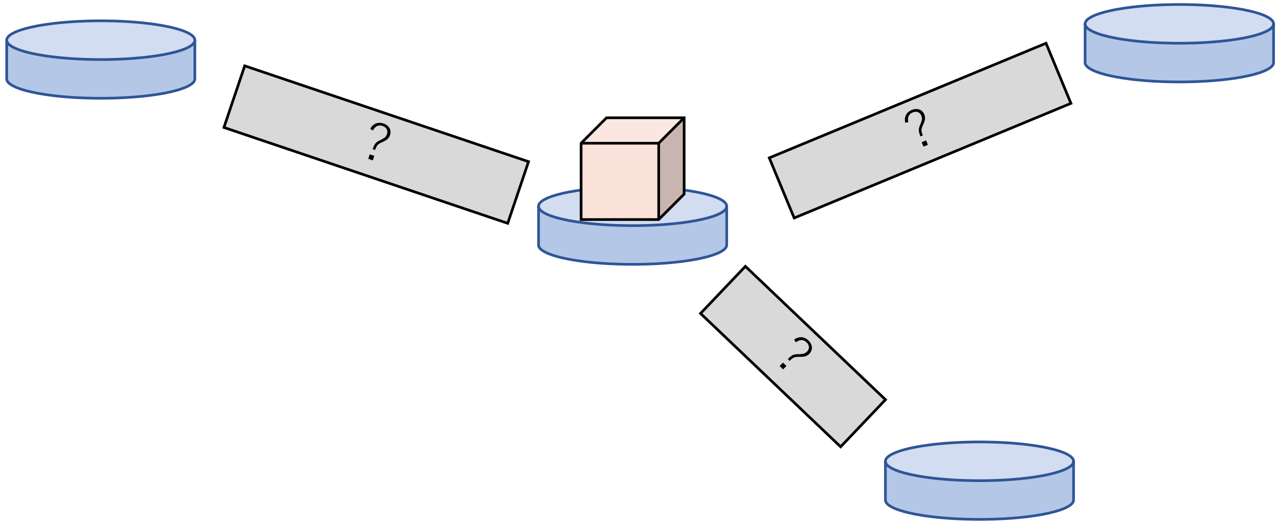
$N = 30$

製品を何個も置くと動きがよく分からないので、1 個だけ置いてみる



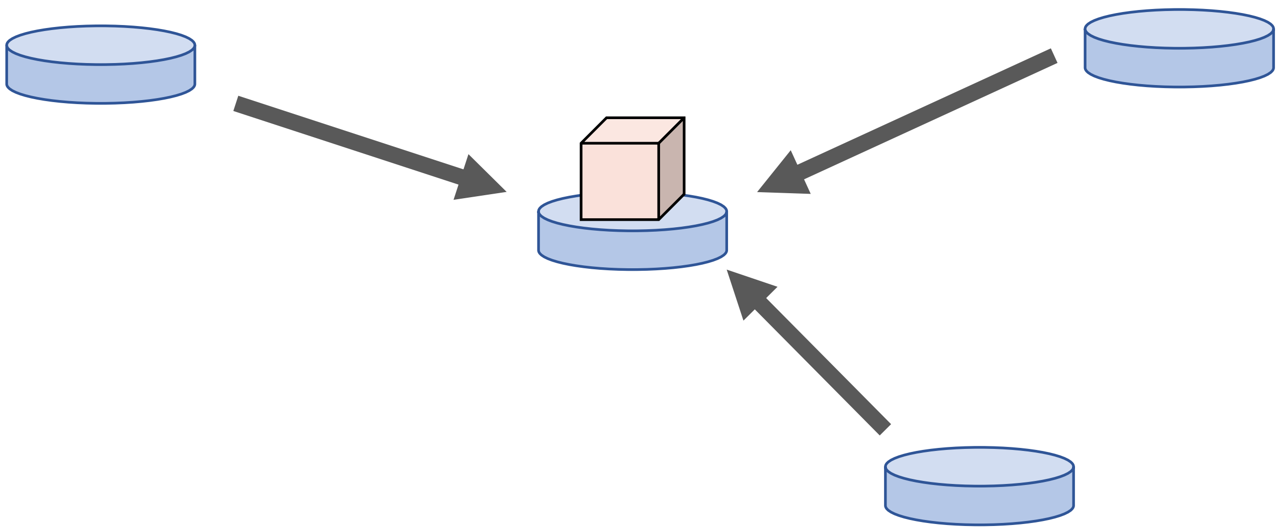
$N = 30$

製品を何個も置くと動きがよく分からないので、1 個だけ置いてみる



$N = 30$

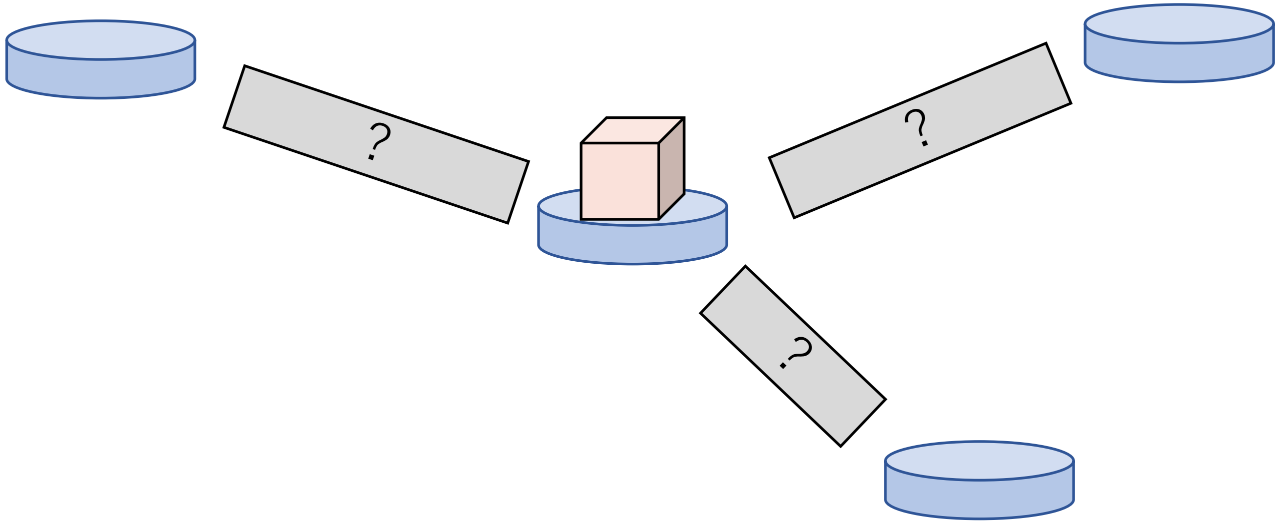
製品を何個も置くと動きがよく分からないので、1 個だけ置いてみる



$N = 30$

製品が動いても動かなくても、どこかの辺の向きは確定できた。

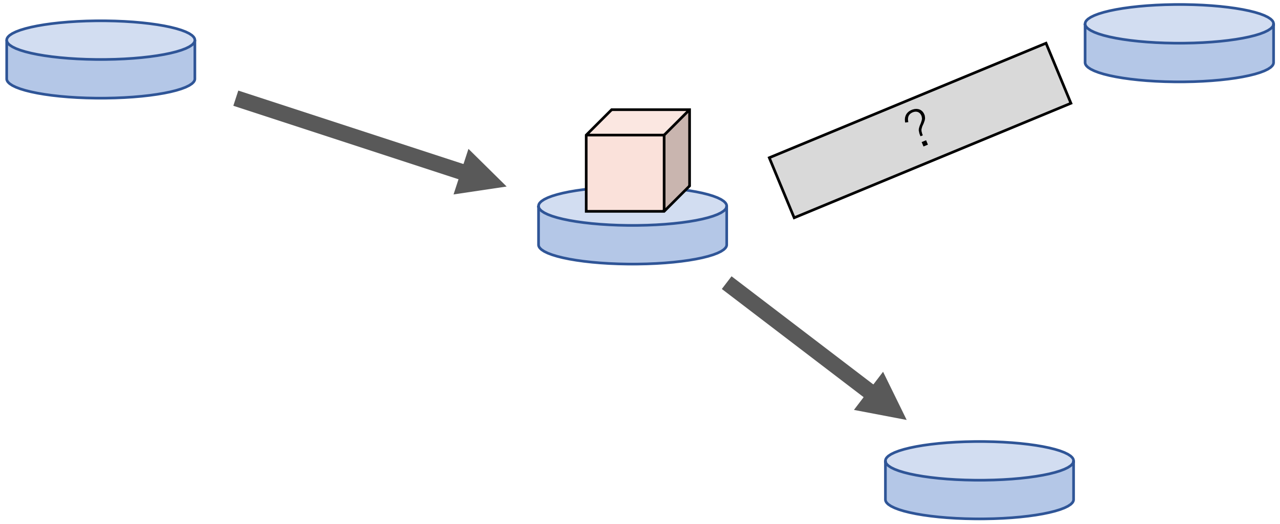
これを繰り返せば OK → 本当に？



$N = 30$

辺の向きが確定しないケース 1

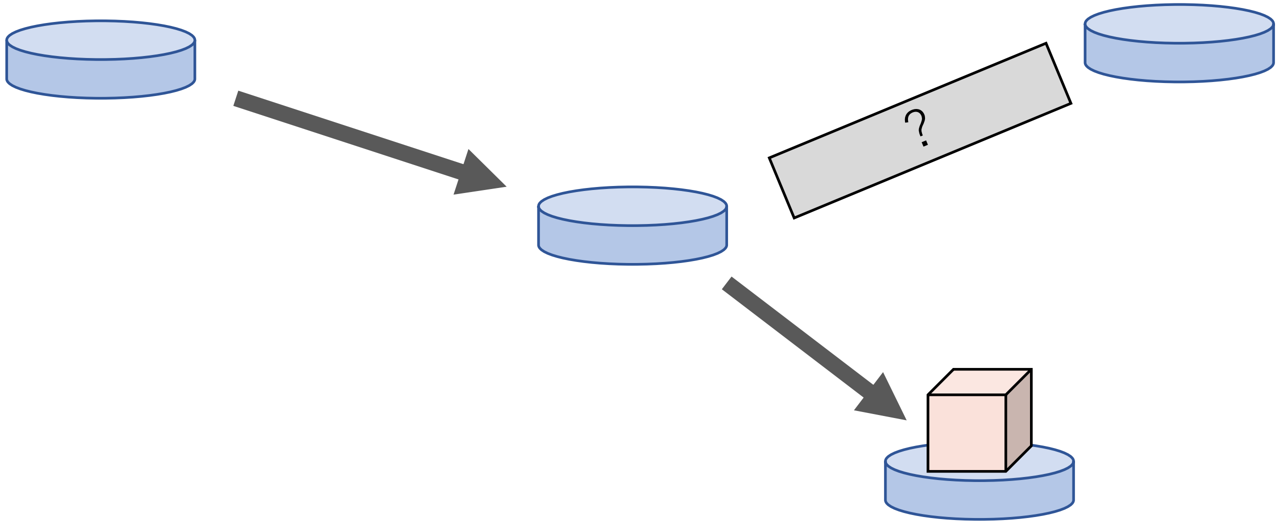
既に確定した辺に沿って流れてしまうと困る



$N = 30$

辺の向きが確定しないケース 1

既に確定した辺に沿って流れてしまうと困る

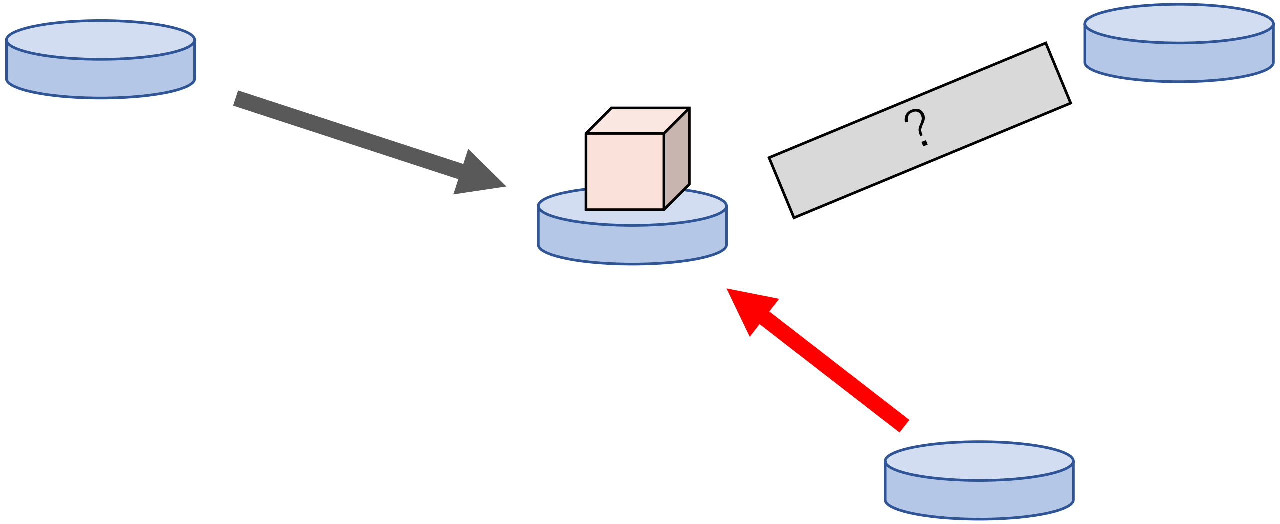


$N = 30$

辺の向きが確定しないケース 1

既に確定した辺に沿って流れてしまうと困る

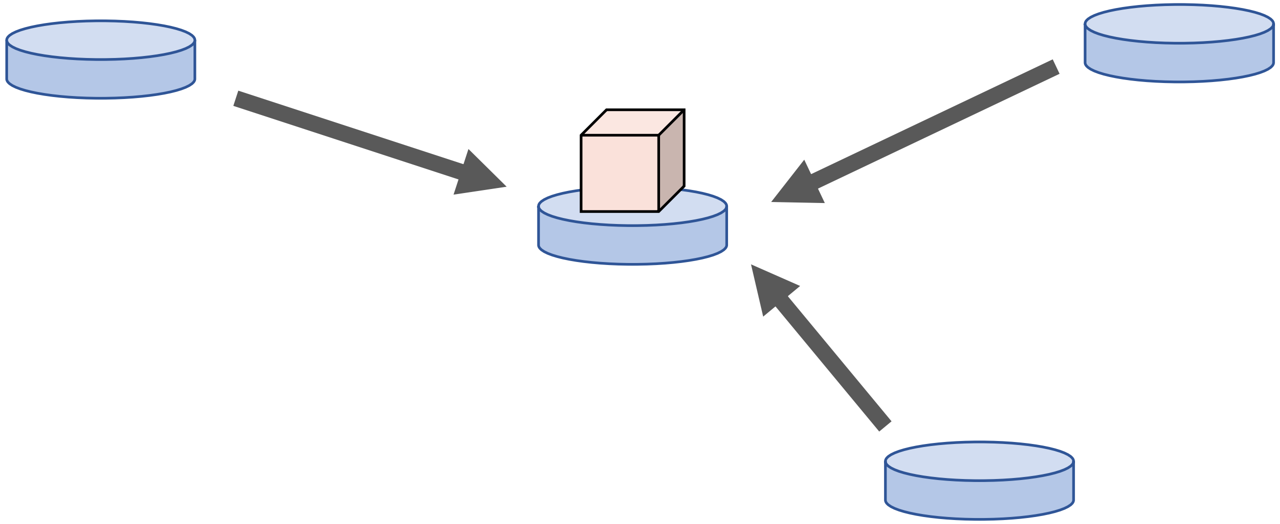
既知の辺は製品側に向けておく



$N = 30$

辺の向きが確定しないケース 2

既に確定した辺だけだと困る

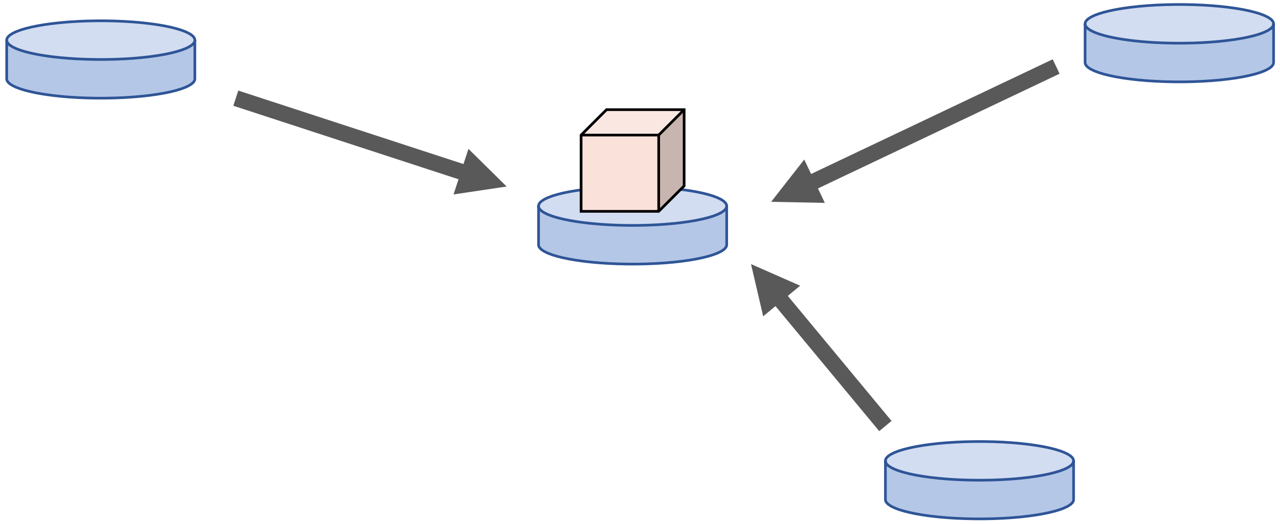


$N = 30$

辺の向きが確定しないケース 2

既に確定した辺だけだと困る

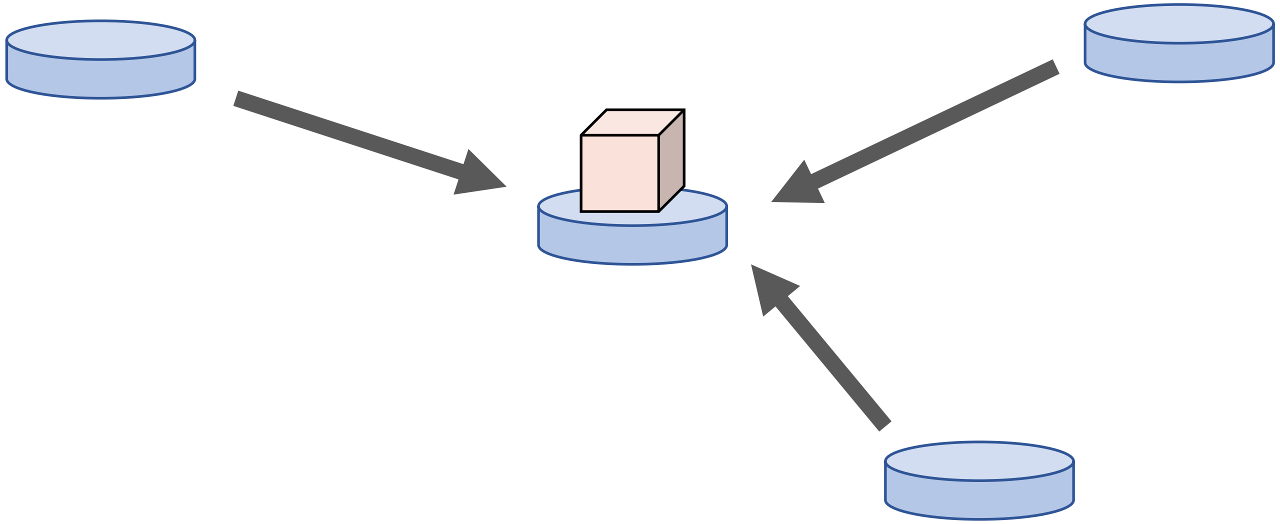
未確定の辺に接続する頂点を選んで製品を置く



$N = 30$

クエリの度に、少なくとも 1 本の辺が確定する

辺は $N - 1 = 29$ 本 → クエリは 29 回以内



$N = 100\,000$,　パスグラフ

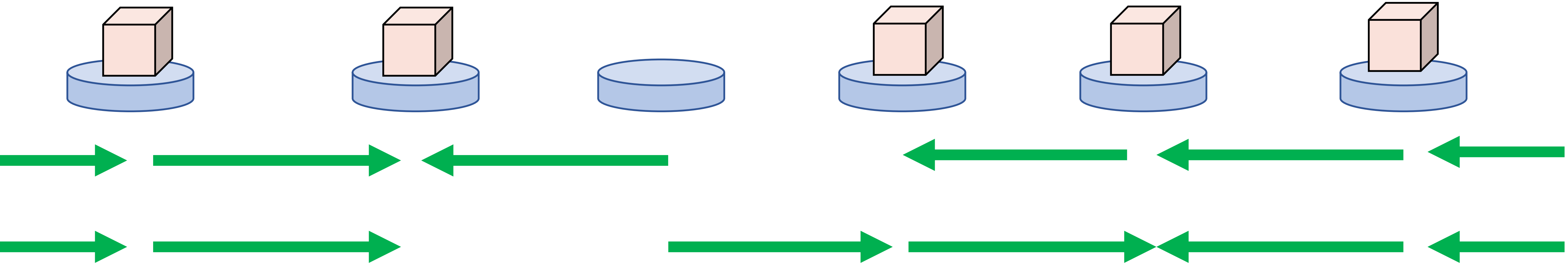
1 回のクエリで同時に何本もの辺を確定させる必要がある

同時に複数の頂点に製品を置きたい

$N = 100\,000$, パスグラフ

1 回のクエリで同時に何本もの辺を確定させる必要がある

同時に複数の頂点に製品を置きたい



どの製品がどう動いたのか分からない

$N = 100\,000$,　パスグラフ

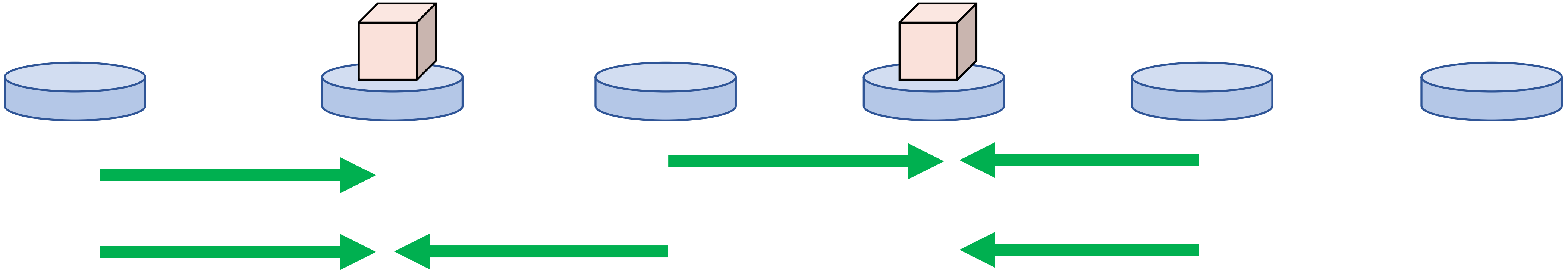
1 回のクエリで同時に何本もの辺を確定させる必要がある

1 個おきに置くとどうか？

$N = 100\,000$,　パスグラフ

1 回のクエリで同時に何本もの辺を確定させる必要がある

1 個おきに置くとどうか？



中央の製品がどちらに動いたのか分からない

$N = 100\,000$,　パスグラフ

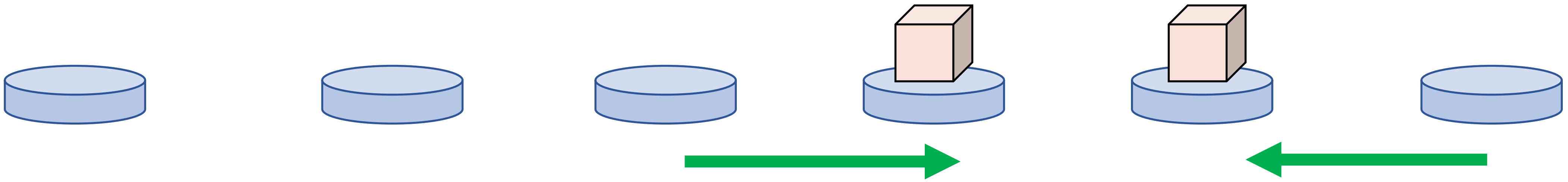
1 回のクエリで同時に何本もの辺を確定させる必要がある

2 個おきに置くとどうか？

$N = 100\,000$, パスグラフ

1 回のクエリで同時に何本もの辺を確定させる必要がある

2 個おきに置くとどうか？

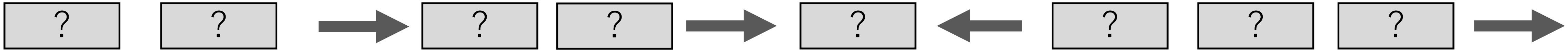


製品同士が干渉しないので、$N/3$ 本の辺が確定する

$N = 100\,000$,　パスグラフ

1 回のクエリで同時に何本もの辺を確定させる必要がある

2 個おきに置くとどうか？

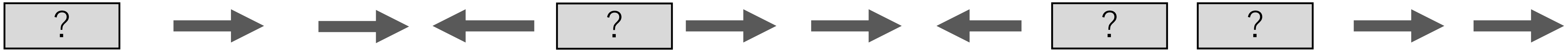


これを繰り返して全ての辺を確定させる

$N = 100\,000$, パスグラフ

1 回のクエリで同時に何本もの辺を確定させる必要がある

2 個おきに置くとどうか？



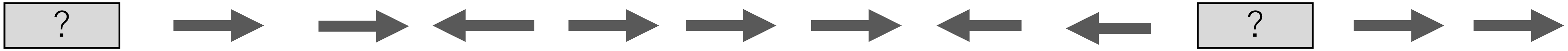
未確定の辺に接続する頂点を、製品が 2 つおき以上離れるように
貪欲に選ぶ

製品が隣接しないから、既知の辺を製品側に向ける処理も問題ない

$N = 100\,000$,　パスグラフ

1 回のクエリで同時に何本もの辺を確定させる必要がある

2 個おきに置くとどうか？

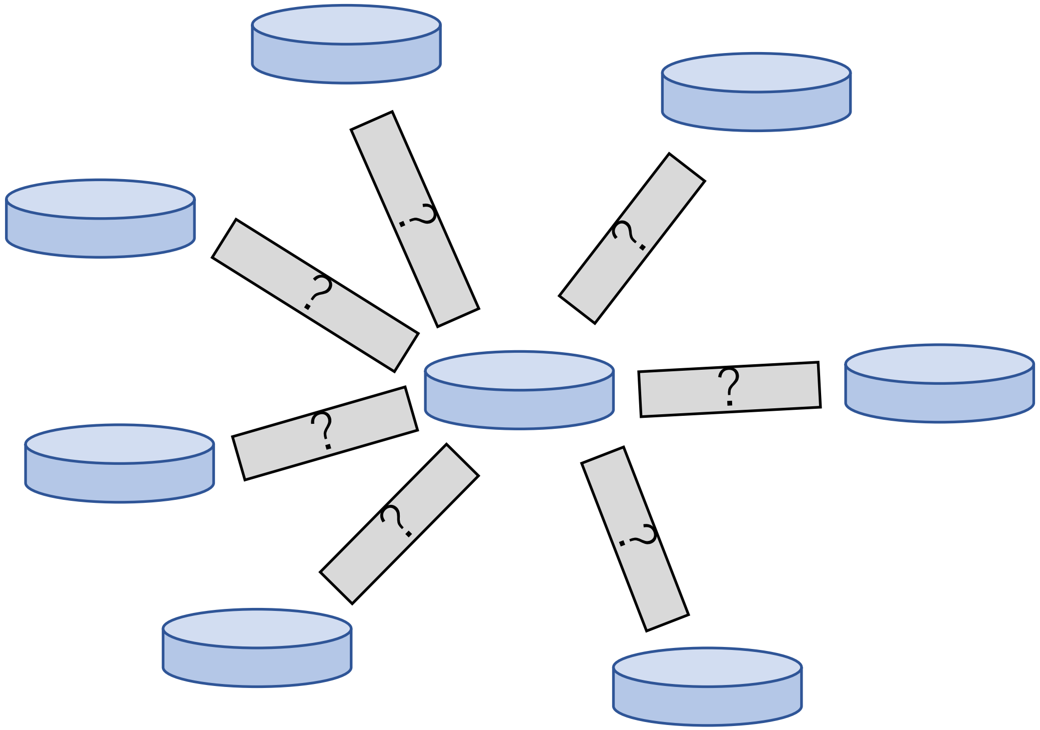


未確定の辺に接続する頂点を、製品が 2 つおき以上離れるように貪欲に選ぶ

4 回以内に全て確定する (証明略)

$$N = 100\,000$$

2 個おきに置く戦略を活用したい

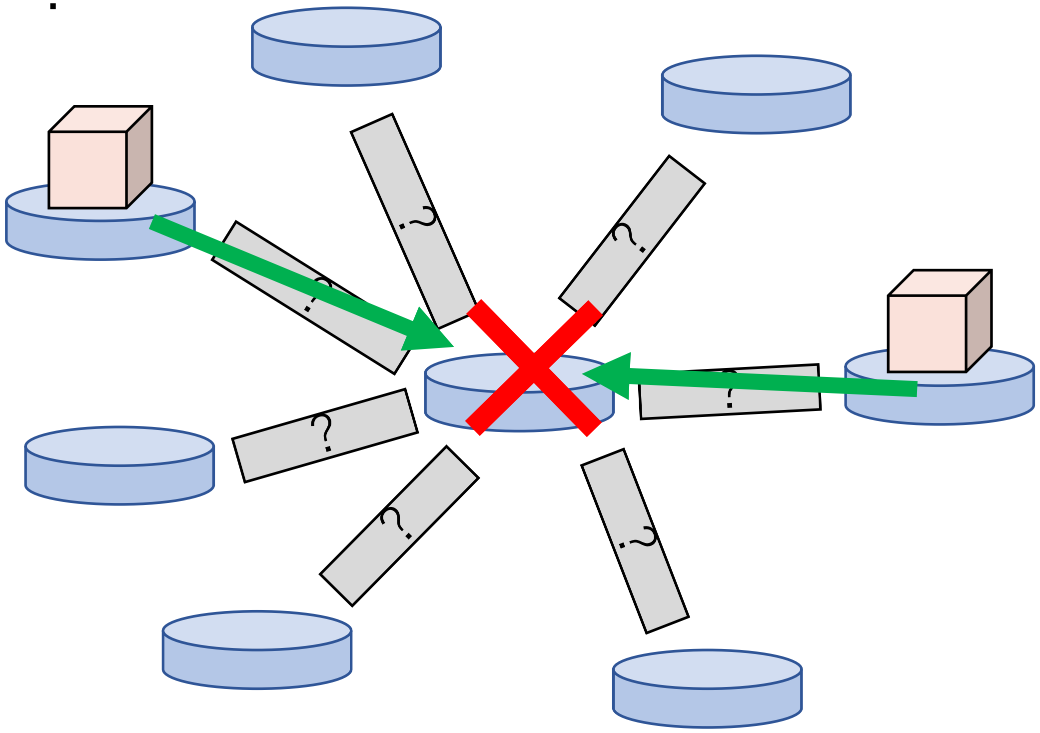


$N = 100\,000$

2 個おきに置く戦略を活用したい

製品の行き先が重ならないようにすると、スターグラフで困る

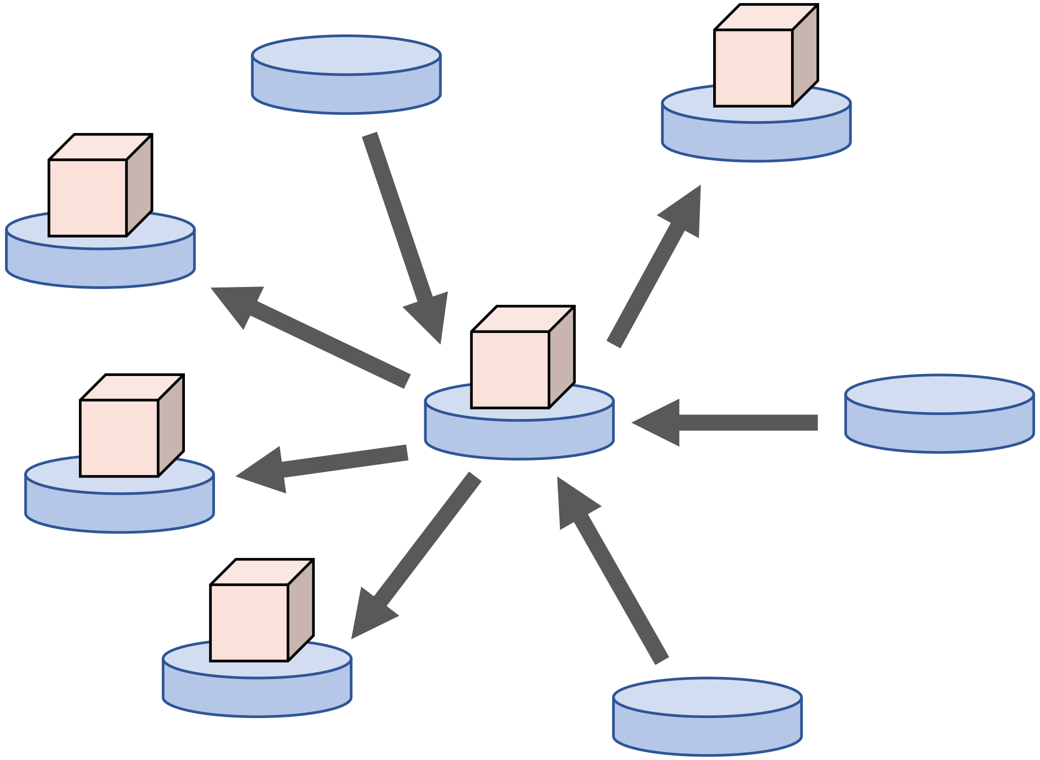
1 個ずつしか置けない！



$N = 100\,000$

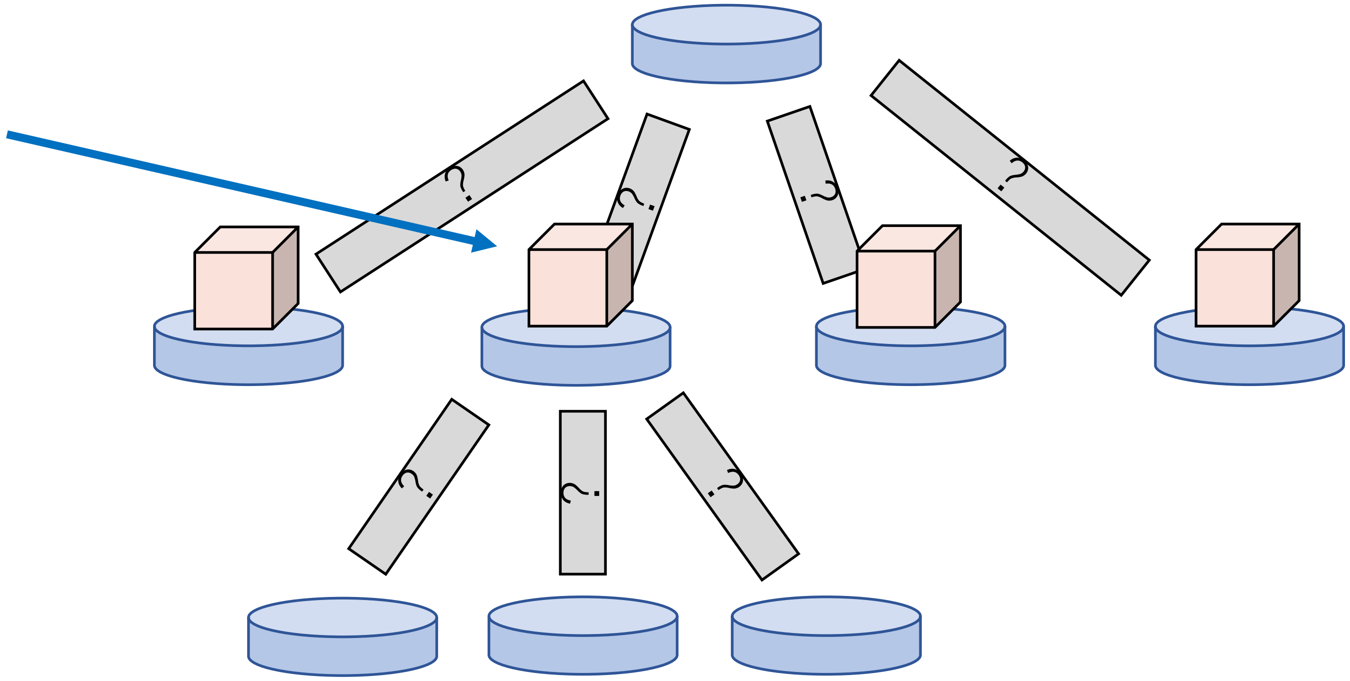
2 個おきに置く戦略を活用したい

スターグラフなら、葉に置いた製品が残っているか見れば、
中心で合流してしまっても大丈夫



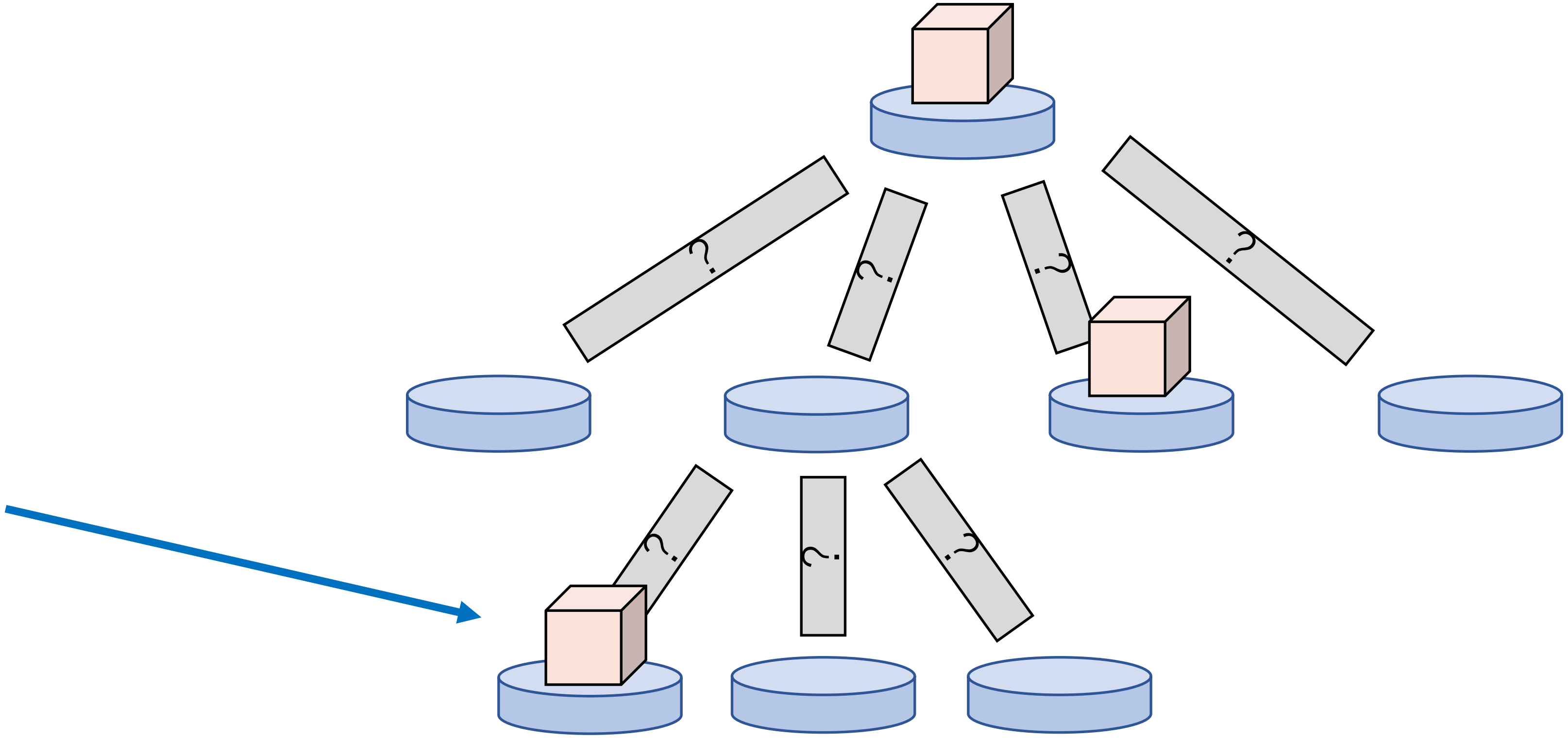
$$N = 100\,000$$

一般の木に対しても、似たような戦略が使えないだろうか？



$N = 100\,000$

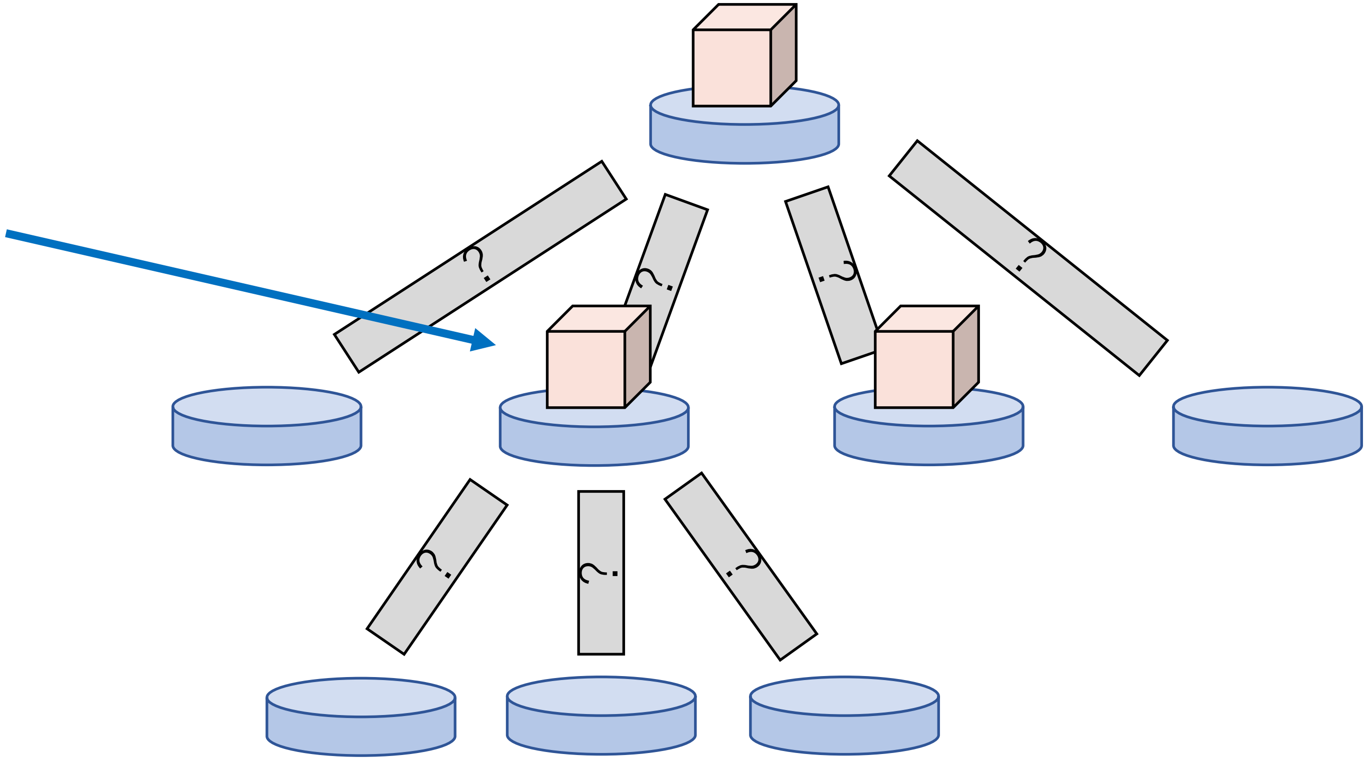
一般の木に対しても、似たような戦略が使えないだろうか？



下の台のどれかに移動していたら分かる。

$N = 100\,000$

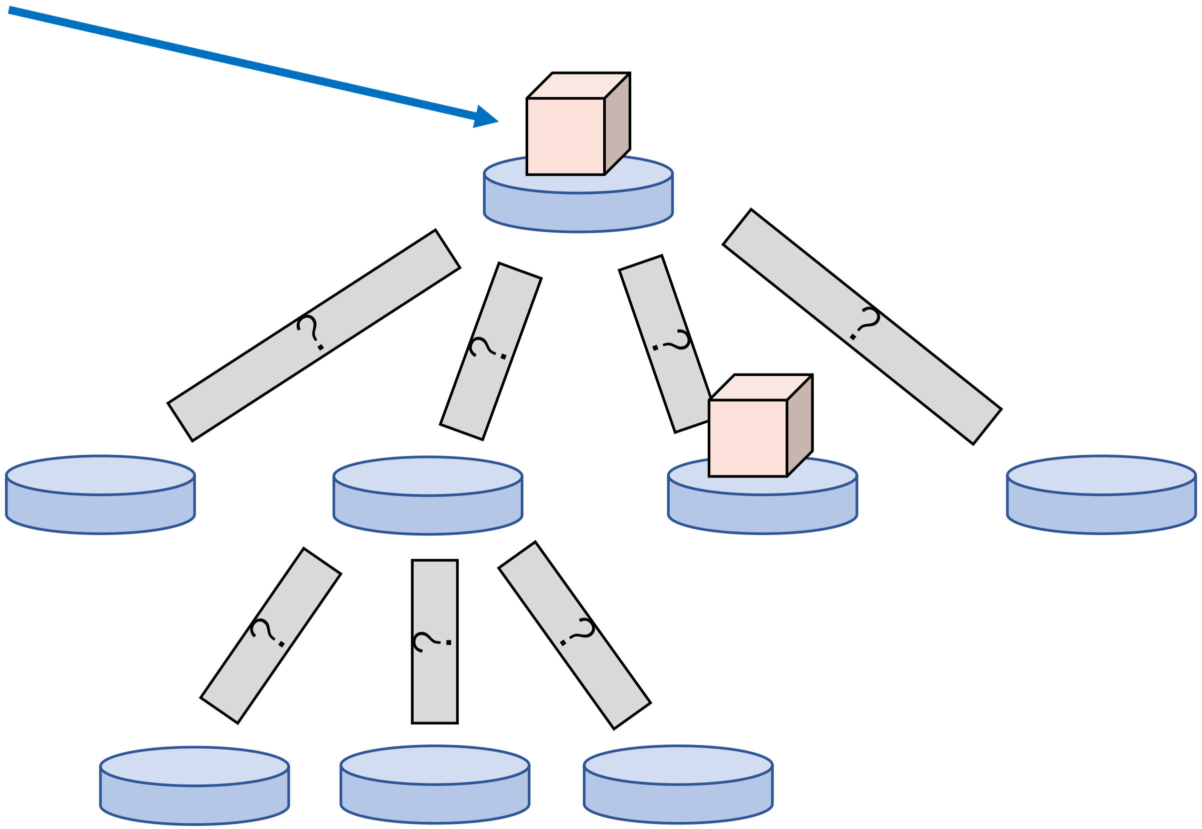
一般の木に対しても、似たような戦略が使えないだろうか？



置いた場所に留まっていた場合も分かる

$N = 100\,000$

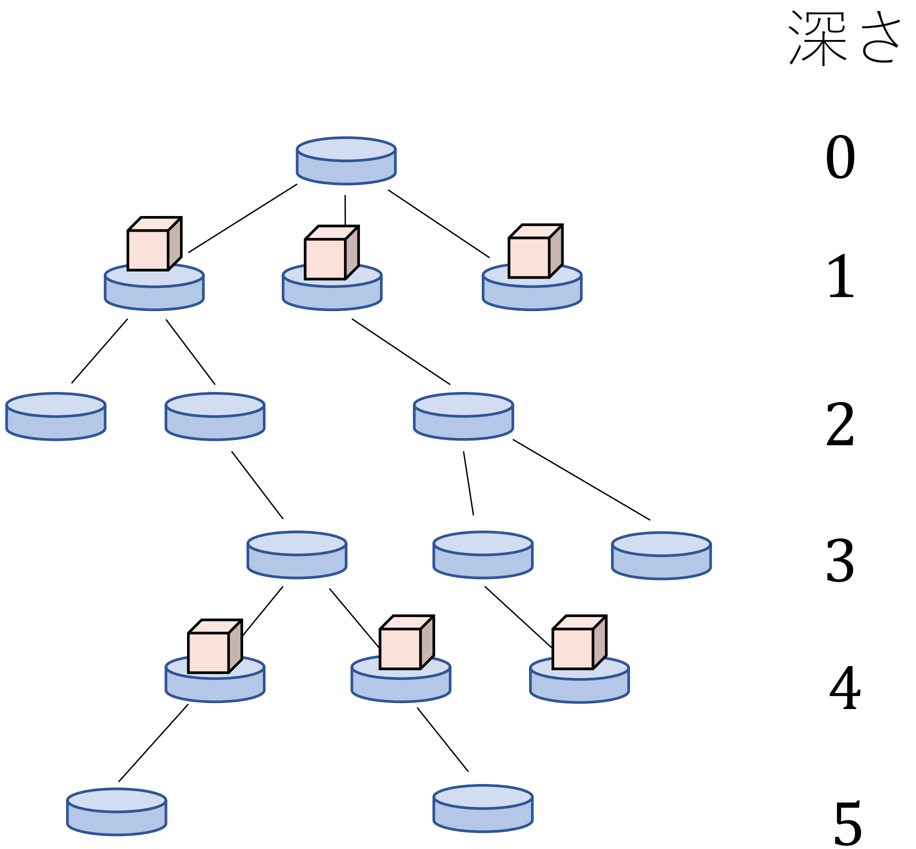
一般の木に対しても、似たような戦略が使えないだろうか？



上の台に行っていた場合、消去法で分かる。

$N = 100\,000$

根付き木にして、深さを **2** つおきに選び、製品を置く

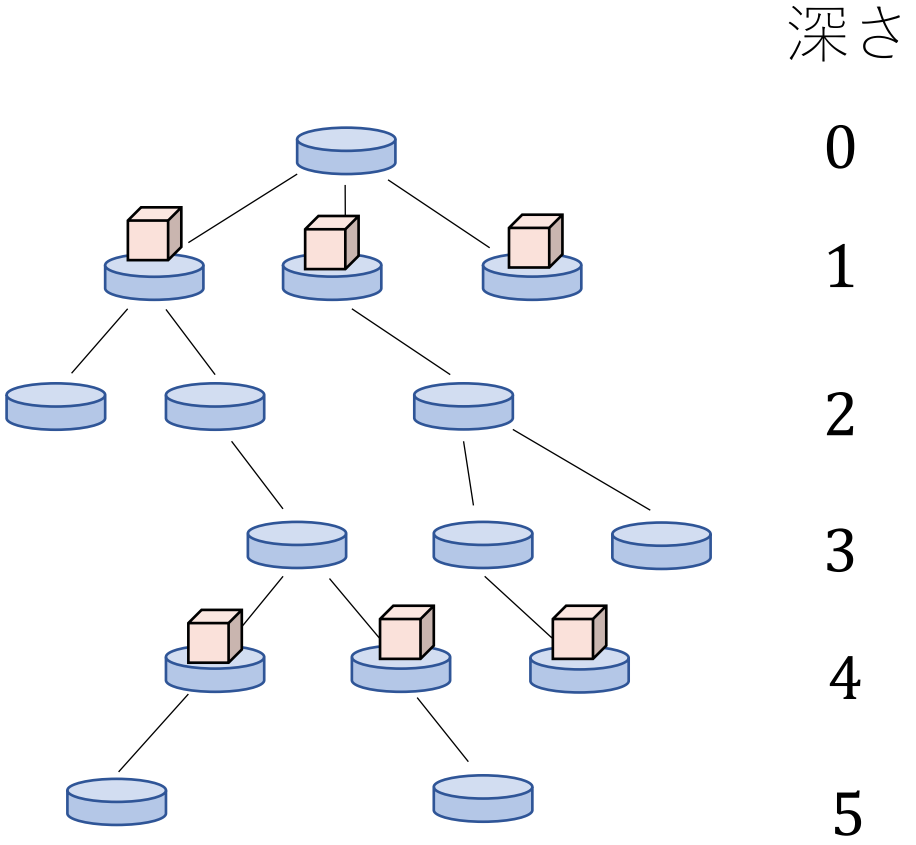


$$N = 100\,000$$

根付き木にして、深さを **2** つおきに選び、製品を置く

深さを mod **3** で分類し、最も大きいグループに製品を置く

$N/3$ 本以上の辺が確定する



$N = 100\,000$

未確定の辺に接続する頂点たちを深さを mod 3 で分類し、
最も大きいグループに製品を置く

・製品は隣接しない
　・既知の辺は邪魔にならない
　・1 製品につき少なくとも 1 本の辺が確定する
・未確定の辺を E 本とすると、接続する頂点は E 個以上ある
→ 少なくとも $E/3$ 本の辺が新たに確定する

$N = 100\,000$

未確定の辺に接続する頂点たちを深さを mod 3 で分類し、
最も大きいグループに製品を置く

・製品は隣接しない
　・既知の辺は邪魔にならない
　・1 製品につき少なくとも 1 本の辺が確定する
・未確定の辺を E 本とすると、接続する頂点は E 個以上ある
→ 少なくとも $E/3$ 本の辺が新たに確定する

$\log_{1.5} N = 28.39\ldots$ だから、30 回以内に全ての辺が確定する

統計情報