問２「美術展」解説

解説：村井

問題概要

美術品が N 点ある

出典:いらすとや

問題概要

それぞれ **大きさ**, **価値** が定まっている

入力例 1

大きさ: 2
価値: 3

大きさ: 11
価値: 2

大きさ: 4
価値: 5

問題概要

いくつかの (1 点以上) 美術品を選ぶ

大きさ: 2
価値: 3

大きさ: 11
価値: 2

大きさ: 4
価値: 5

問題概要

選んだ美術品たちに対して,
- 価値の合計を S
- 大きさの最大値を A_{max}, 最小値を A_{min}

としたとき, $S-(A_{\mathrm{max}}-A_{\mathrm{min}})$ を最大化したい

$S=8$
$A_{\mathrm{max}}=4$
$A_{\mathrm{min}}=2$
$S-(A_{\mathrm{max}}-A_{\mathrm{min}})=6$

大きさ: 2
価値: 3

大きさ: 4
価値: 5

小課題 1

- $N \leq 16$

- 美術品の選び方は $2^N - 1$ 通り
- $N \leq 16$ なので，すべて試すことができる
  - ビット演算
  - 深さ優先探索 (DFS)

- 計算量：$O(N \cdot 2^N)$

小課題 2

- $N \leq 300$
- 全探索は間に合わない

- 多項式時間にしたい！

考察

大きさ最大，最小の美術品を固定してみる

考察

大きさ最大，最小の美術品を固定してみる

最小　　　　　　　　最大

考察

固定した最小より小さい美術品は使わない
（最大より大きいものについても同様）

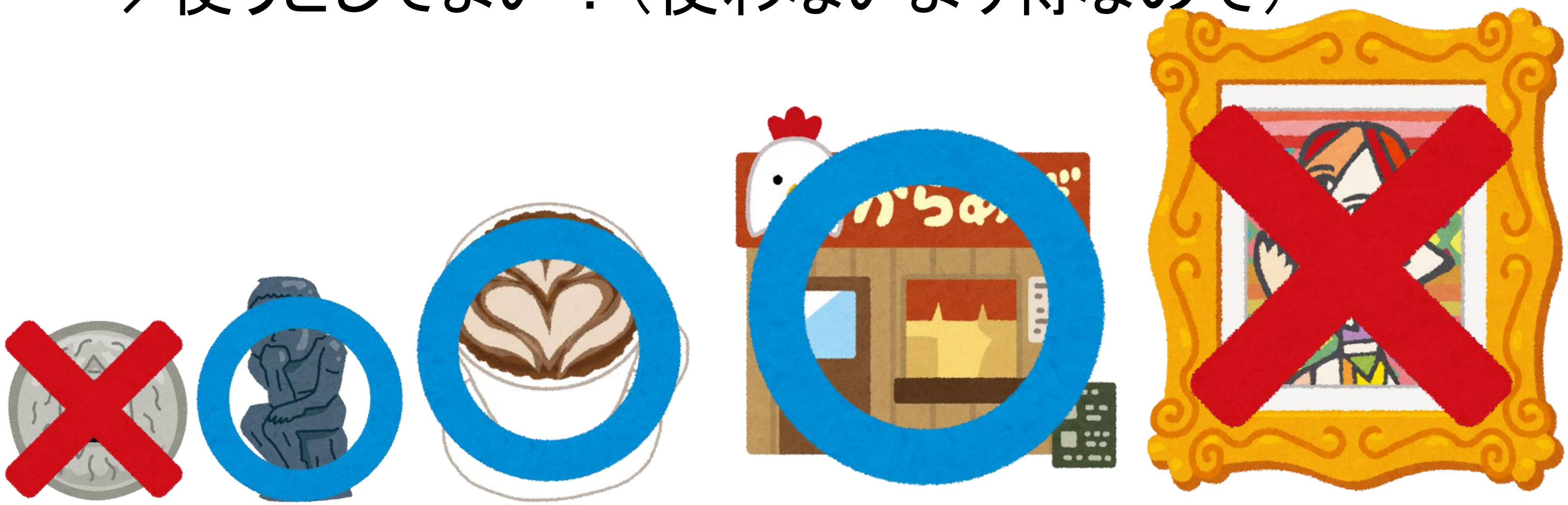
最小　　　最大

考察

最大と最小の間にあるものについては，使っても使わなくても $A_{\max} - A_{\min}$ は変わらない

一方，使うと（価値は正なので）S が増える

→ 使うとしてよい！（使わないより得なので）



最小　最大

小課題 2 まとめ

大きさ最大，最小の美術品を固定すると，美術品全体の選び方を決めてしまうことができる

- 最大，最小の選び方 $O(N^2)$
- それぞれの選び方に対し，$S-(A_{\max}-A_{\min})$ の計算 $O(N)$

→ 全体で $O(N^3)$

$\boxed{N \le 300 \text{ を解ける}}$

小課題 3

- $N \leq 5000$

- 最大，最小の選び方 $O(N^2)$
- それぞれの選び方に対し，$S - (A_{\max} - A_{\min})$ の計算 $O(N)$

どちらかを速くできないか？

こっちを速くする

美術品の順番の並べ替え

美術品 $1, 2, \ldots, N$ は大きさ順に並んでいるとは限らない

美術品の順番の並べ替え

ソートして，大きさ順に並べ替えてしまってよい
（価値の値も同時に並び替えるのを忘れずに！）

価値の和の計算の高速化

最大と最小を決めたときの価値の和は，この間の美術品の価値の和になる

ソートした後は，区間になっている

区間の値の和は，累積和で求められる

累積和

「一番左からそこまでの価値の合計」を前計算しておく

→ 区間の和が，合計 2 つの差で求められる

価値　3　1　4　1　5

合計　0　3　4　8　9　14

1 + 4 + 1 = 9 - 3

小課題 3 まとめ

- 最大，最小の選び方 $O(N^2)$
- それぞれの選び方に対し，$S-(A_{\max}-A_{\min})$ の計算 $O(1)$

→全体で $O(N^2)$

$\boxed{N \leq 5000 \text{ を解ける}}$

小課題 4

- $N \leq 500000$
- 選び方 $O(N^2)$ すべて試す余裕もない

累積和による $S-(A_{\max}-A_{\min})$ の表現

大きさでソートした後，i 番目から j 番目までの美術品を選ぶことにする $(i \leq j)$

番号	1		2		3		4		5
大きさ	A_1	$\leq$	A_2	$\leq$	A_3	$\leq$	A_4	$\leq$	A_5
価値	B_1		B_2		B_3		B_4		B_5

累積和による $S-(A_{\max}-A_{\min})$ の表現

$S_i=B_1+\cdots+B_i$ とおけば，この選び方で

$$S-(A_{\max}-A_{\min})=\left(S_j-S_{i-1}\right)-\left(A_j-A_i\right)$$

（$S_0=0$ としておく）




番号	1		2		3		4		5
大きさ	A_1	$\leq$	A_2	$\leq$	A_3	$\leq$	A_4	$\leq$	A_5
価値	B_1		B_2		B_3		B_4		B_5

累積和による $S-(A_{\max}-A_{\min})$ の表現

$S_i = B_1 + \cdots + B_i$ とおけば，この選び方で

$$
\begin{aligned}
&S-(A_{\max}-A_{\min})\\
&=\left(S_j - S_{i-1}\right) - \left(A_j - A_i\right)\\
&=\underbrace{\left(S_j - A_j\right)}_{j\text{ のみに依存}} - \underbrace{\left(S_{i-1} - A_i\right)}_{i\text{ のみに依存}}
\end{aligned}
$$

$i \le j$ で，$S_{i-1} - A_i$ の最小値を持ってくればよい
→ j を $1, 2, \ldots$ と動かして $S_{i-1} - A_i$ を順次更新すればよい

最終的なアルゴリズム

1. 美術品を大きさでソート
2. $S_0, S_1, \ldots, S_N$ を求めておく
3. $j = 1, 2, \ldots, N$ の順に考えて，
$$\left(S_j - A_j\right) - (S_{i-1} - A_i)\ (i \leq j)$$
   の最大値を更新
   - $S_{i-1} - A_i$ は，今までの最小値を順次更新していく

- 計算量 : $O(N \log N)$ （ソート）
- 満点が得られる

得点分布